ΑΣΚΗΣΗ: Να δείξετε ότι η ορίζουσα κάθε πίνακα λύσεων του γραμμικού ομογενούς συστήματος

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos^2 t & \log(1+t^2) \\ t^2+t & -\sin^2 t \end{pmatrix} y(t)$$

είναι σταθερός αριθμός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $\Phi(t)$ πίνακας λύσεων του (E_0) τότε (από τον τύπο Jacobi)

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t_0)| \cdot \exp\left[\int_{t_0}^{t} (1-\cos^2 s - \sin^2 s)\,ds\right] =$$

$= |\Phi(t_0)| \cdot 1 = |\Phi(t_0)|$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Ένας πίνακας λύσεων $\Phi(t)$ του (E_0) είναι ένας βασικός πίνακας λύσεων αν και μόνο αν $|\Phi(t)| \neq 0$ για όλα $t \in I$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\Phi(t) = (u_{ij}(t))$ είναι ένας βασικός πίνακας του (E_0)

Θεωρούμε τις στήλες αυτού του πίνακα

$$u_j(t) = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

οι οποίες είναι λύσεις του (E_0)

Οι u_j είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα διανύσματα

$$u_j(t_0) = \begin{pmatrix} u_{1j}(t_0) \\ u_{2j}(t_0) \\ \vdots \\ u_{nj}(t_0) \end{pmatrix}$$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

NO.

Date

Αλλά $u_j(t_0)$, $j=1,2,\dots,n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$c_1u_1(t_0)+c_2u_2(t_0)+\dots+c_nu_n(t_0)=0$$

$$\Rightarrow c_1=c_2=\dots=c_n=0.$$

Αλλά,

$$c_1u_1(t_0)+c_2u_2(t_0)+\dots+c_nu_n(t_0)=0.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1u_{11}(t_0)+c_2u_{12}(t_0)+\dots+c_nu_{1n}(t_0) \\ c_1u_{21}(t_0)+c_2u_{22}(t_0)+\dots+c_nu_{2n}(t_0) \\ \vdots \\ c_1u_{n1}(t_0)+c_2u_{n2}(t_0)+\dots+c_nu_{nn}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

το οποίο σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Άρα η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων

$$|\Phi(t_0)|\neq 0.$$

Αλλά από τύπο Jacobi

$$|\Phi(t)|=|\Phi(t_0)|\cdot \exp\left[\int_{t_0}^{t} tr\,A(s)\,ds\right]$$

όπου $|\Phi(t_0)|\neq 0$

(αντίστροφα): Εάν $|\Phi(t)|\neq 0$ $\forall t\in I \Rightarrow |\Phi(t_0)|\neq 0 \Rightarrow$ τα $u_j(t_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow$ στήλες του πίνακα γραμμικά ανεξάρτητες $\Rightarrow$ βασικός πίνακας

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν $\Phi(t)$ είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού συστήματος (E_0) και D είναι ένας $n\times n$ πίνακας σταθερός που είναι μη ιδιάζων τότε ο πίνακας $\Phi(t)\cdot D$ είναι επίσης ένας βασικός πίνακας του (E_0)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Γνωρίζουμε ότι $\Phi(t)$ βασικός πίνακας του (E_0)

οπότε $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\,\Phi(t)$

Επιπλέον $|\Phi(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$

Έστω επίσης, $D = (d_{ij})$ d_{ij} σταθεροί.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\Phi^*(t) := \Phi(t)\cdot D \text{ είναι βασικός πίνακας}$$

έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)\cdot D) = \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}\, d_{kj}}_{=\,c_{ij}(t)}\Big)$$

οπότε $\frac{d}{dt}(\Phi(t)\cdot D) = \dot{\Phi}(t)\cdot D$

Συνεπώς, εφόσον ο βασικός

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)\cdot D) = A(t)\Phi(t)\cdot D = A(t)(\Phi(t)\cdot D)$$

άρα $\Phi(t)\cdot D$ είναι ένας πίνακας λύσεων του (E_0)

Επίσης,

$$|\Phi(t)\cdot D| = |\Phi(t)|\cdot|D| \neq 0 \quad \Big(\text{διότι } |\Phi(t)| \neq 0 \text{ και } |D| \neq 0\Big)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν $\Phi(t)$ και $\Psi(t)$ είναι δύο βασικοί πίνακες του (E_0) τότε υπάρχει ένας σταθερός μη ιδιάζων πίνακας D τέτοιος ώστε

$$\Psi(t) = \Phi(t)\cdot D.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφόσον Φ, Ψ βασικοί πίνακες του (E_0) ισχύει

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \text{ και } |\Phi(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$$

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = A(t)\Psi(t) \text{ και } |\Psi(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

NO.

Date

Επίσης, έχουμε

$$\Phi(t)\cdot\Phi(t)^{-1} = I$$

οπότε $\dfrac{d}{dt}\left(\Phi(t)\cdot\Phi(t)^{-1}\right) = 0$

Αλλά,

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)\cdot\Phi(t)^{-1}\right) = \frac{d}{dt}\left[\Phi(t)\right]\cdot\Phi(t)^{-1} + \Phi(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)^{-1}\right) = 0$$

Άρα, $\Phi(t)\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\Phi(t)^{-1}\right) = -\left(\dfrac{d}{dt}\Phi(t)\right)\Phi(t)^{-1}$

άρα,

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t)^{-1}\right) = -\Phi(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\Phi(t)^{-1} \quad (*)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$\Psi(t) = \Phi(t)\cdot D$, D σταθερός

$|D| \neq 0$

ισοδύναμα

$$\Phi(t)^{-1}\cdot\Psi(t) = D$$

Όμως $\dfrac{d}{dt}\left(\Phi(t)^{-1}\cdot\Psi(t)\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\Phi(t)^{-1}\right)\cdot\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\Psi(t)\right)$

$$\overset{(*)}{=} -\Phi(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\Phi(t)\right)\Phi(t)^{-1}\cdot\Psi(t) + \Phi(t)^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\Psi(t)$$

$$= \left(-\Phi(t)^{-1}A(t)\cdot\underbrace{\Phi(t)\cdot\Phi(t)^{-1}}_{=I} + \Phi(t)^{-1}A(t)\right)\Psi(t)$$

$$= \left(-\Phi(t)^{-1}\cdot A(t) + \Phi(t)^{-1}\cdot A(t)\right)\Psi(t) = 0$$

Άρα, $\Phi(t)^{-1}\cdot\Psi(t) = D$, D σταθερός

$|D| \neq 0$ (αφού Φ, Ψ βασικοί πίνακες $|\Phi| \neq 0$, $|\Psi| \neq 0$)

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Εάν $\Phi(t)$ είναι ένας βασικός πίνακας του (E_0) και u μια λύση του (E_0) τότε υπάρχει ένα και μόνο ένα n-διάστατο διάνυσμα $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ τέτοιο ώστε $u(t)=\Phi(t)\cdot c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θεωρούμε $t_0 \in I$ και έστω $u(t_0)=u_0$ τότε θεωρούμε το n-διάστατο διάνυσμα $c=\Phi(t_0)^{-1}\cdot u_0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=\Phi\cdot c$

Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα η y είναι λύση του (E_0)

Επίσης,

$$y(t_0)=\Phi(t_0)\cdot c = \Phi(t_0)\,\Phi(t_0)^{-1}\cdot u_0 = u_0.$$

Αλλά λόγω της μοναδικότητας της λύσης του (E_0) που ικανοποιεί μια δοσμένη αρχική συνθήκη οι u και y ταυτίζονται άρα $u=y=\Phi\cdot c$

Τώρα έστω c' τέτοια ώστε $u=\Phi(t)\cdot c'$

Άρα $\Phi(t)\cdot c = \Phi(t)\cdot c' \underset{\Phi(t)^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{c=c'}$